Igångsättarnas roll för att utveckla ett matematiskt resonemang i ett kollaborativt arbetssätt vid en gemensam arbetsyta

En studie av resonemangsförmågan hos elever med hög matematisk begåvning

Ann-Sophie Tillnert & John Mattsson

Stockholms universitet

Stockholm Teaching & Learning Studies

Innehållsförteckning

Inledning 3
Syfte och frågeställningar 4
Teoretiskt ramverk 4
Matematiska förmågor enligt Krutetskii 4
Kreativt resonemang 6
Joint Problem Space 7
Metod 8
Urval 8
Val av problem 9
Forskningsetiska överväganden 10
Analys 11
Deduktiv analys 11
Induktiv analys 12
Resultat 14
Problemlösningsprocessens sekvenser 14
Igångsättare 14
Whiteboardtavlans roll i det matematiska samtalet 16
Diskussion 17
Referenser 19
Bilaga 1: Problem 1 och 2 samt lösning av dessa 22

Inledning

Det finns flera studier där människans olika förmågor undersökts och utifrån dessa studier har slutsatsen dragits att de är medfödda, men att de framför allt kan utvecklas (Bloom & Sosniak, 1985; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010). Studier som specifikt har undersökt den matematiska förmågans struktur har visat att även den kan utvecklas och att detta sker vid deltagande i matematiska aktiviteter, exempelvis problemlösning (Juter & Sriraman, 2011; Krutetskii, 1976; Rosca & Zörgő, 1973; Sheffield, 2003). Enligt Krutetskii (1976) är den matematiska förmågan komplex och består av ett antal olika delförmågor. I denna studie har vi använt oss av dessa delförmågor för att kunna identifiera om elever besitter det vi benämner hög matematisk förmåga.

Elever med hög matematisk begåvning får i traditionell, svensk matematikundervisning inte alltid de utmaningar de behöver för att utvecklas utifrån sin potential (Pettersson, 2011). Enligt Pettersson (2011) kan detta leda till att de tidigt tappar intresset för matematikämnet, och följaktligen inte heller når så långt i sina resultat som de borde kunna utifrån sin förmåga.

Vi har valt att inrikta vår studie på en av de delförmågor som har definierats av Krutetskii (1976). Många elever med hög matematisk förmåga uppvisar delförmågan att förkorta sina matematiska resonemang och beräkningar (Krutetskii, 1976), vilket gör att deras kunskaper och förståelse inte alltid blir tydlig vid bedömning i skolsammanhang. Eftersom Skolverkets styrdokument för bedömning av kunskapskraven i matematik (Skolverket, 2019) utgår från fem matematiska förmågor, där resonemangs- och kommunikationsförmåga ingår, kan bedömningen av dessa elevers prestationer därför bli missvisande. Eftersom vi vill försöka hitta en möjlighet att anpassa undervisning och bedömning för den aktuella elevgruppen, vill vi undersöka deras problemlösningsprocess när den sker i ett kollaborativt arbetssätt och vid en gemensam arbetsyta. Detta för att se om vi kan identifiera några faktorer som kan bidra till ett mer utvecklat resonemang.

Lithner (2008) har definierat matematiska problem som kan ge upphov till en resonemangskvalitet vilken kan ses som motsatsen till ett förkortat resonemang, och därför har vi valt att använda den problemtypen.

När det gäller problemlösning har Pólya (1966) visat att den matematiska problemlösningsprocessen kan delas in i olika sekvenser, och för att kunna analysera innehållet i dessa använder vi oss av en analysmall enligt Roschelle och Teasley (1994). Denna analysmall utgår från att eleverna använder ett kollaborativt arbetssätt. Vi har valt att undersöka just detta arbetssätt eftersom vi inte har hittat några studier kring dess betydelse för elever med hög matematisk begåvning,

Samtidigt vill vi även undersöka vad en gemensam arbetsyta kan ha för betydelse för att det matematiska samtalets resonemangsinnehåll ska utvecklas. Enligt Liljedahl (2014), som undersökt gemensamma arbetsytor som medierande redskap vid problemlösning, har de en avgörande betydelse för problemlösningsprocessen. Därför är det intressant att undersöka om en gemensam arbetsyta även kan bidra till ett mer utvecklat resonemang för elever med hög matematisk begåvning.

Syfte och frågeställningar

Syftet är att undersöka vilka faktorer som kan bidra till att elever i årskurs 9 med hög matematisk begåvning ges möjlighet att utveckla och förtydliga sina förkortade resonemang, när detta sker i en kollaborativ problemlösningsprocess vid en gemensam arbetsyta.

De preciserade frågeställningarna är:

- Vad i det matematiska samtalet leder till ett mer utvecklat resonemang för matematiskt begåvade elever i årskurs 9, under en kollaborativ problemlösningsprocess?
- På vilket sätt bidrar en gemensam arbetsyta under ovannämnda process till ett matematiskt samtal som resulterar i ett mer utvecklat resonemang?

Teoretiskt ramverk

Under denna rubrik kommer vi gå igenom studiens huvudsakliga ramverk och då först beskriva Krutetskiis matematiska förmågor (1976) som grund för det vi valt att undersöka. Därefter beskrivs ramarna för olika slags resonemang (Lithner, 2008) som understöd för utformningen av problem vilka kan skapa förutsättningar för ett kreativt resonemang. Eftersom vi vill undersöka processen där ett förkortat resonemang utvecklas används även Lithners ramverk (2008) för att definiera det vi kallar ett utvecklat resonemang, samt för att klargöra vad ett förkortat resonemang saknar. Till sist görs en sammanfattning av Roschelles och Teasleys (1994) teoretiska ramverk för samarbete och gemensam arbetsyta, vilket används för att strukturera och analysera vårt insamlade dataunderlag med stöd i problemlösningssekvenser definierade i ramverket Joint Problem Space (JPS). Lithners resonemangsperspektiv (2008) som utgår från ett individuellt resonemang, kompletteras på så sätt av Roschelles och Teasleys samarbetsperspektiv (1994).

I den här studien har vi ett sociokulturellt perspektiv (Vygotsky, 1987) där utgångspunkten är att vi människor lär oss och utvecklas i sociala aktiviteter tillsammans med andra, exempelvis vid ett kollaborativt arbetssätt (Roschelle & Teasley, 1994) där ett gruppsamarbete sker synkront under ett matematiskt samtal.

Matematiska förmågor enligt Krutetskii

Den här studiens syfte och frågeställningar utgår ifrån de matematiska förmågor hos elever med hög matematisk begåvning som beskrivs av psykologen Krutetskii (1976). Hans slutsatser kring dessa förmågor är empiriskt grundade på tolv års studier av 200 elever, vilket utgör ett i sammanhanget ovanligt stort material. Krutetskii beskriver tre matematiska huvudförmågor som i sin tur består av flera delförmågor och bland dem nämns förmågan att förkorta matematiska resonemang.

Krutetskiis matematiska förmågor (1976) beskrivs i en översättning av Szabo (2013):

”A. Förmågan att *insamla och formalisera matematisk information*

- t.ex. förmågan att upptäcka den formella strukturen i ett matematiskt problem.

B. Förmågan att *bearbeta matematisk information*

- t.ex. förmågan att tänka logiskt inom områden som representeras av kvantitativa och spatiala samband samt numeriska och algebraiska symboler,
- förmågan att tänka och uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler,
- förmågan att effektivt kunna generalisera samband, räknemetoder och egenskaper hos matematiska objekt,
- förmågan att förkorta matematiska resonemang och tillhörande beräkningar,
- flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet, enkelhet, elegans och rationalitet i lösningar.

C. Förmågan att *minnas matematisk information*

- s.k. matematiskt minne, det vill säga. ett generaliserat minne för matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring.

D. Ovanstående förmågor resulterar i en *allmän* och *sammansatt förmåga*, som manifesteras i ett matematiskt sinnelag.” (Szabo, 2013, s. 27–28).

Det finns inga entydiga definitioner på vad begreppet förmåga innebär, men den tolkning vi har utgått ifrån beskrivs av Koshy, Ernest och Casey (2008). Tolkningen innebär att en förmåga är en psykologisk egenskap i form av en potential som gör det möjligt att göra framsteg i en matematisk aktivitet.

I den här studiens kontext är det intressant att lyfta att Skolverkets fem förmågor som ligger till grund för svensk grundskolas långsiktiga mål i kursplanen för matematik (Skolverket, 2019) grundas på åtta kompetenser som beskrivs i det danska Kom-projektet (Niss och Jensen, 2002). Dessa kompetenser betecknar en rad utbildningsmål som ska genomsyra varje moment i den danska kursplanen i matematik. Skolverkets (2019) förmågor är således en teoretisk konstruktion, där begreppet kompetens har bytt namn till förmåga (Helenius, 2006). De matematiska förmågorna är alltså egentligen kopplade till individen själv och därför oberoende av skolans förväntningar i enlighet med tolkningen av Koshy, Ernest och Casey (2008). Kompetenserna däremot, bestäms av skolans förväntan på individen och kan bara i en matematisk aktivitet ge indikationer på vilka underliggande förmågor som individen besitter.

Krutetskii (1976) däremot menar att de i citatet ovan (Szabo, 2013, s. 27–28) beskrivna delförmågorna visar sig i ett ”matematiskt sinnelag”. När vi utifrån Krutetskii (1976) definierar vad ett förkortat resonemang är, utgår vi från att det är ett påstående eller beräkning som är korrekt. Det som saknas är en matematiskt förankrad motivering, eftersom förmedlaren har svårt att uttrycka sina matematiska tankar i ord. Detta ska inte förväxlas med otydliga formuleringar eller språkliga svårigheter. Exempel på förmågan att förkorta resonemang finns beskriven i en fallstudie där den matematiskt högt begåvade Terence Tao har studerats sedan barndomen till vuxen ålder (Clements, 1984). Studien visar att trots vuxen ålder och framstående akademiska meriter, kvarstår fenomenet gällande svårigheterna med att förklara matematiska tankar och idéer.

Kreativt resonemang

Bakgrunden till Lithners ramverk (2008) är att elever ofta lär sig matematik genom att nöta in och komma ihåg, detta trots att skolans styrdokument har haft formuleringar kring problemlösning sedan Lgr 80 (Skolöverstyrelsen, 1980) och förtydligat dessa i både LPO 94 (Utbildningsdepartementet, 1994) och LGR 11 (Skolverket, 2019). Genom ett flertal empiriska studier kring inlärningssvårigheter och sätt att resonera matematik, har Lithner (2008) format ett ramverk som beskriver olika typer av matematiska resonemang. Grundidén med ramverket är att matematiska resonemang delas in i de två huvudkategorierna; imitativt och kreativt. Syftet med ramverket är att karakterisera de två resonemangstyperna och vad som ligger bakom dessa.

Imitativt resonemang innebär att eleverna ”imiterar” metoder och lösningar som de har mött flera gånger tidigare i rutinuppgifter. Kreativt resonemang innebär däremot att eleverna löser ett problem som de inte mött tidigare där de behöver finna nya, okända vägar för att nå fram till en lösning. De behöver ha vissa kunskaper för att kunna lösa problemet, men problemet bör vara utformat så att de kan hitta en lösning genom att tänka ”utanför boxen”.

Att lösa samma typ av problem ett flertal gånger gör att eleven kan lösa ytterligare liknande sådana genom att använda ett imitativt tankesätt. Detta resonemang saknar en djupare förståelse vilket innebär att detta tankesätt inte räcker till om problemet utformas på ett annat sätt. För att lösa problemet krävs då en djupare förståelse, ett kreativt tankesätt. Dessa två huvudtyper av resonemang har Lithner (2008) sedan utgått från vid kategoriseringen av matematiska resonemang i ett teoretiskt ramverk. Begreppet matematiskt resonemang definieras i ramverket som det resonemang som används för att skapa och komma fram till påståenden och slutsatser vid lösning av problem.

Själva innebörden av begreppet kreativ beror ju på sammanhanget. Men i ramverket för matematiskt resonemang definieras ett kreativt resonemang både utifrån hur annan forskning beskriver begreppet samt de empiriska studier som ramverket grundar sig på. Bergqvist och Lithner (2005) beskriver i sin studie själva bakgrunden till hur ett kreativt resonemang definieras enligt ramverket. En förenklad bild av användandet av ett kreativt resonemang är att det används under problemlösningsprocessen kring problem som inte är av rutinmässig karaktär. För att ett resonemang ska vara ett matematiskt grundat kreativt resonemang, ska det enligt ramverket uppfylla följande fyra kriterierna (Bergqvist & Lithner, 2005):

1. *Något nytt.* Ett för den resonerande nytt resonemang skapas, eller ett glömt resonemang återskapas.
2. *Flexibilitet.* Det ska finnas olika sätt att angripa och hantera situationen.
3. *Rimlighet.* Det framförs argument eller motiveringar till varför de valda sätten att lösa problemet är korrekta eller rimliga.
4. *Matematiskt grundat.* Argumenten för den valda lösningsstrategin ska innehålla matematiskt förankrade motiveringar.

Joint Problem Space

Joint Problem Space (JPS) innebär att eleverna arbetar i ett kollaborativt arbetssätt under diskussion vid en gemensam arbetsyta, med syftet att uppnå en gemensam, överenskommen kunskap och förståelse. Med kollaborativt samarbete menas att eleverna arbetar med samma idé, förslag, strategi eller lösning samtidigt. Motsatsen är att de delar upp arbetet mellan sig för att sedan foga samman de olika delarna, det vill säga kooperativt samarbete (Roschelle & Teasley, 1994). Vi har även indikationer på att matematisk begåvade elever föredrar kooperativt samarbete i homogena grupper (Szabo, 2017).

Roschelle och Teasley (1994) har hävdat att den grundläggande aktiviteten i samverkande problemlösning är skapandet och underhållet av JPS. Ett gemensamt problemutrymme (JPS) är en förståelse, som har förhandlats fram gemensamt, och som stöder problemlösningsaktiviteten genom att integrera följande frågor:

a. Målet, det vill säga vart ska vi?
b. Beskrivning av den aktuella problemstatusen, det vill säga var står vi nu?
c. Medvetenhet om tillgängliga problemlösande åtgärder, det vill säga hur kommer vi till målet?

För att konstruera en JPS måste eleverna delge varandra individuella kunskaper, förståelse och idéer så att de utifrån dem kan förhandla fram gemensamma mål, kunskaper och lösningsstrategier. För att under tiden behålla sin JPS måste de övervaka och kontrollera lösningsprocessen genom att inse och reparera missuppfattningar och oenigheter, samt besluta om lämpliga lösningsstrategier.

För att upprätta en gemensam förståelse i det kollaborativa samarbetet är eleverna beroende av dialog, det vill säga språket, samt olika handlingar som gester och olika typer av åtgärder (t. ex rita, skriva, peka). En JPS måste alltså skapas av eleverna genom kollaborativt samarbete kring en gemensam arbetsyta, utifrån dialog och handlingar samt dessutom underhållas och repareras under arbetets gång.

En gemensam arbetsyta kan utgöras av en whiteboardtavla med whiteboardpennor. Horisontella whiteboardtavlor har använts som medierande redskap av Liljedahl (2016) vid kollaborativ problemlösning, och visade sig då ha stor betydelse för att få igång och underhålla problemlösningsprocessen. Just den horisontella whiteboardtavlan visade sig dessutom vara överlägsen andra manuella alternativ som blädderblock, skrivhäften samt liggande whiteboardtavlor. I andra studier har en dator med en viss programvara använts som gemensam arbetsyta med samma effekt (Roschelle & Teasley, 1994; Granberg & Olsson, 2015).

För att upprätthålla det kollaborativa arbetssättet och den gemensamma arbetsytan görs "insnävningar" (narrations). Vid en dator innebär det att eleverna bara har en dator, en mus eller tangentbord. Vid en whiteboardtavla, som vi använde i vår studie, kan det innebära att eleverna bara har en enda penna eller uppmanas att skriva på tavlan en i taget. Detta gör att de som inte skriver kan övervaka det som skrivs, och därmed kommentera, fråga, argumentera för eller mot den aktuella idén, medan den som skriver får motivera, förklara och delge sin idé. På så sätt uppstår muntliga diskussioner som syftar till att eleverna tillsammans accepterar, förkastar eller utvecklar föreslagna idéer, antaganden, samband eller lösningsstrategier.

I ramverket finns ett antal analyssekvenser vilka utgör ett redskap för att studera elevernas arbete med problemet. Med dessa sekvenser som definieras nedan går det att strukturera och analysera dataunderlaget, det vill säga transkriberingarna av lektionerna. De fyra sekvenserna är definierade av Roschelle och Teasley (1994) och definieras i korta drag enligt följande:

(I): *Sätta sig in i problemet och komma överens om ett mål*, det vill säga initiera resonemangssekvensen och starta upp JPS

(S): *Skapa, implementera och utvärdera lösningsstrategierna*, vilket ofta görs i en diskussion där turn-taking och if-then utgör en stor del.

(F): *Upptäcka och hantera missuppfattningar, oenigheter och avvikelser* under förhandling som inkluderar acceptans och reparation

(L): *Lösa problemet* och på så sätt nå målet

Som beskrivits tidigare definierade Roschelle och Teasley (1994) samarbete som "en samordnad, synkron aktivitet som är resultatet av ett fortsatt försök att konstruera och upprätthålla en gemensam uppfattning om ett problem" (Roschelle & Teasley, 1994, s. 70). Baserat på denna uppfattning introducerade Roschelle och Teasley begreppet gemensamt problemutrymme som den delade och socialt förhandlade kunskapsstrukturen som består av mål, en beskrivning av den aktuella problemstatusen och medvetenhet om tillgängliga problemlösningsåtgärder. JPS innehåller alltså en förhandlad och gemensam förståelse av de redan nämnda frågorna: Var är vi på väg, var är vi just nu och hur kommer vi dit?

Kommunikation mellan individer följer ett väl specificerat växelspel som beskrivs av lingvister och sociologer (Schegloff & Sacks, 1977). Turn-taking är ett viktigt begrepp i sammanhanget som beskriver växelspelet i dialogen. Det innebär att en deltagare börjar en mening eller en idé, och en annan bygger vidare eller slutför den i en efterföljande utsaga. Frågor, acceptanser, meningsskiljaktigheter och reparationer är ytterligare begrepp som används för att beskriva innehåll och struktur i samtalet eftersom de visar hur väl deltagarna förstår varandra (Clark & Schaefer, 1989).

Metod

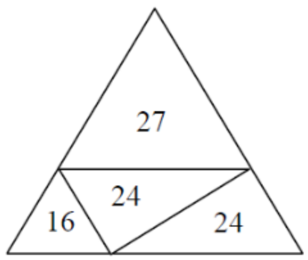
Urval

De deltagande eleverna i studien gick i årskurs 9 när studien genomfördes. Urvalet av eleverna skedde genom att varje elev granskades utifrån de av Krutetskii (1976) definierade matematiska förmågorna. Detta säkerställdes genom att en av författarna har undervisat eleverna under två år. Eleverna som bedömdes uppfylla minst tre av dessa förmågor erbjöds att vara med i studien, och nio av dessa tackade ja till medverkan. Inriktningen på studien har varit kvalitativ med medvetenhet om det begränsade elevunderlaget.

Val av problem

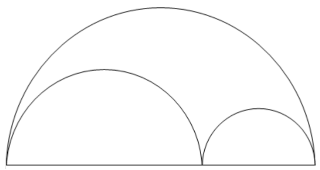
Vi har valt att i denna rapport fokusera på två matematiska problem (se bilaga 1). Problem 1 hämtades från matematiktävlingen Pythagoras Quest (2009) och problem 2 från Attila Szabos licentiatuppsats (2013). De båda problemen behandlar samma matematiska område, geometri, och har valts ut med hjälp av Lithners ramverk för resonemang (2008). Dessutom har vi utgått från Lithners senare förtydliganden gällande problemens design för att möjliggöra ett kreativt resonemang (Lithner, 2017). Valet av svårighetsgrad på själva problemen har utgått från antagandet att det ska innehålla något som är nytt och intellektuellt utmanande för eleverna samt ligga inom deras proximala utvecklingszon (Lithner, 2008; Schoenfeld, 1985; Vygotskij, 1987). Med hjälp av Lithners (2008) ramverk för att skapa ett kreativt problem har vi valt ut matematiska problem som är utformade för att stimulera eleverna till ett kreativt resonemang. Problemen visas i korthet nedan, för fullständig beskrivning samt förslag på lösningar, se bilaga 1.

Problem 1: Talen i figuren visar omkretsen i var och en av de 4 trianglarna. Vad är omkretsen av den stora triangeln? (se bilaga 1 för ytterligare information om problem 1).



Figur 1. Problem 1 – trianglar.

Problem 2: I en halvcirkel ritar vi ytterligare två halvcirklar, enligt figuren nedan. Är den stora halvcirkelns längd större, mindre eller lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder? (se bilaga 1 för ytterligare information om problem 2).



Figur 2. Problem 2 – halvcirklar.

Det måste även undersökas att eleverna inte har stött på problemen eller liknande sådana tidigare. Det görs genom att undersöka de läromedel som de har arbetat med samt samtal med undervisande lärare till eleverna. Dessutom har följande fråga ställts till eleverna: Har du stött på det här problemet eller liknande tidigare? En möjlig felkälla kan vara att eleven glömt eller inte berättat att denne stött på liknande problem tidigare, men vi bedömer ändå utifrån elevernas agerande och lösningsförfarande att problemen var nya för dem.

Genomförande av lektionerna som ingick i studien ägde rum i ett klassrum tillsammans med två lärare, det vill säga denna studies författare. Varje lektion började med att eleverna fick var sitt papper med det matematiska problemet, vilket läraren även läste upp högt så att eleverna skulle få problemet presenterat både auditivt och visuellt. De fick fundera enskilt på problemet under två till tre minuter. Efter detta delade läraren in eleverna i tre grupper med två till tre elever i varje grupp, beroende på närvaro. Enligt Liljedahl (2014) har en av läraren slumpvis indelning i grupper en mer positiv effekt på elevernas problemlösningsprocess, än om de får välja själva vilka de ska arbeta med. Vid de tre olika lektionstillfällena gjordes en ny gruppindelning varje gång för att undvika att resultaten berodde på en viss gruppsammansättning.

Varje grupp hade tillgång till en egen whiteboardtavla där de ombads att skriva ner tankar, lösningar eller liknande. Grupperna arbetade med problemet framför whiteboardtavlan under diskussion och varje grupp redovisade en gemensam lösning på tavlan. Eleverna uppmuntrades att arbeta kollaborativt, vilket de gjort tidigare vid flertalet tillfällen och inte är främmande för. Även det kollaborativa arbetssättets positiva påverkan på problemlösningsprocessen har dokumenterats av Liljedahl (2016).

Vid varje grupp fanns en iPad som filmade whiteboardtavlan och en iPad med extern mikrofon som både filmade gruppen och tog upp allt ljud. Hela lektionen dokumenterades på detta sätt.

Under tiden eleverna arbetade försökte vi hålla lärarens inblandning på så låg nivå som möjligt för att minska risken för guidning och påverkan kring elevernas lösningar och metodval. Enligt Liljedahl (2016) stimuleras problemlösningsprocessen av ett sådant förhållningssätt från lärarens sida.

Efter lektionerna med eleverna har alla videofilmerna transkriberats, dels för att få en djupare förståelse för dataunderlaget, dels för att få ökad tydlighet gällande händelseförloppet. Bryman (2011, s. 429) förklarar vikten av att transkribera en text för ökad förståelse och menar på att transkribering av empirin underlättar för en noggrannare analys av vad som sagt samt upprepade genomgångar samt strukturering av materialet kan ske genom att materialet transkriberas. Dataunderlaget strukturerades sedan med hjälp av två analysscheman vilka beskrivs vidare under avsnittet analys.

Forskningsetiska överväganden

Vid projektstarten fick eleverna information om forskningen och deras rättighet att dra sig ur när som helst under studiens gång. Denna information hade de även fått skriftligt på ett informationsblad/godkännande som de gått igenom hemma tillsammans med sina vårdnadshavare. Informationsbladet bygger på Stockholm Teaching & Learning Studies grundmall och innehåller överväganden kring forskningsetiska rådets fyra huvudkrav, informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2012). Innan studien påbörjades samlade vi in skriftligt godkännande från samtliga deltagare och deras vårdnadshavare.

Analys

Analysen genomfördes genom att använda teoretiska begrepp som involverar kreativt resonemang (Lithner, 2008) och samverkande problemlösning med hjälp av Joint Problem Space (Roschelle & Teasley, 1994).

För att svara på forskningsfrågorna strukturerades och analyserades data med hjälp av Roschelles & Teasleys (1994) tidigare presenterade ramar. Dataunderlaget, det vill säga transkriberingarna strukturerades i en analysmall enligt ramverkens aktivitetssekvenser:

(I): Sätta sig in i ett problem samt skapa ett mål, det vill säga *initiera* resonemangsekvensen och JPS;

(S): Skapa, implementera och utvärdera lösningens *strategier*;

(F): Observation och hantering av missuppfattningar och avvikelser under *förhandlingar*

(L): *Lösa problemet* och därmed nå målet.

Deduktiv analys

I den deduktiva analysen undersökte vi problemlösningsprocessens olika sekvenser enligt ramverket för JPS (Roschelle & Teasley, 1994). Vi identifierade då analysmallens fyra olika sekvenser och övergångar genom att analysera elevernas utsagor. Elevernas agerande som tog sig uttryck i att gestikulera samt skriva, rita och peka på tavlan, noterades och användes också. Exempel 1 visar delar av processen när en av grupperna arbetade med problem 1.

Exempel 1: Problemlösningssekvenser och övergångar enligt analysmall i problem 1.

Hän-delse	Utsaga	Agerande	Sekvens enligt analysmall
1	**Love:** Jag börjar rita upp figuren då.	**Love:** Går fram till tavlan	I
2	**Tom:** Det är ok	**Tom:** Sätter upp uppgiften på tavlan	I

Eleverna börjar med att rita upp figuren på whiteboardtavlan (1) och även sätta uppgifts-pappret på den (2). Därför är det rimligt att anta att de initierar problemlösnings-processen med att tillsammans upprätta en JPS.

3	**Love:** Eh… Jag skulle vilja hävda att hela triangeln är likformig		S
4	**Tom:** Mm		S
5	**Love:** Och topptriangeln är likformig. Och den här är likformig. Eller liksidig, heter det. Och då är dom likformiga med varandra	**Love:** Pekar på triangeln med omkrets 16	
6	**Tom:** Och de är väl även de där två?	**Tom:** Pekar i figuren	S
7	**Love:** Att dom är likformiga?		S

Det matematiska samtalets innehåll börjar behandla förutsättningarna för en möjlig lösningsstrategi (3–7). Eleverna implementerar och prövar om strategin är möjlig genom att jämföra trianglarna i figuren, vilket indikerar att samtalet har övergått till sekvens S där själva lösningsstrategin skapas, implementeras och prövas.

8	**Sara:** Den är liksidig		F
9	**Love:** Ja. Jo, dom... Nä, jag tror inte det		F
10	**Tom:** Ja, eller dom… De är likadana, men åt olika håll		F
11	**Love:** Men vi kan ju… För jag tänker, om man nu… Vi kan ju göra ett antagande att den är liksidig och i så fall är det väldigt lätt att räkna ut.		S
12	**Sara:** Mm		S
13	**Love:** Eh.. Men… Och utifrån det kanske vi kan bevisa att den är liksidig, som den förhoppningsvis är. Annars får vi tänka om.		S

I utsagorna 8–10 uttrycker eleverna olika meningar om formen på trianglarna, vilket leder till att de börjar klarar ut missförstånd och olika åsikter under förhandling (vilket inte visas i sin helhet). Med detta som grund bedömer vi att processen här har gått över till sekvens F. Hanteringen av olika åsikter fortsätter tills en av dem kommer med ett förslag på strategi som alla kan enas om (11). När de då kommer fram till en gemensam acceptans (12–13) kan de fortsätta med att implementera och pröva sin lösningsstrategi, vilket tyder på att de har gått över till sekvens S.

14	**Love:** Mm. Men det måste väl stämma.		S
15	**Tom:** Och vad blir det? Det blir…		L
16	**Sara:** Fyrtiotre		L
17	**Tom:** Femton gånger tre, fyrtiofem. Åsså minus tre, så fyrtiotvå, typ. Så att båda dom som vi har sett blir samma resultat		L

Eleverna fortsätter med att lösa problemet i sekvens S och avslutas med att Love konstaterar att lösningen verkar stämma (14). Därefter räknar eleverna fram ett svar på problemfrågan (15–17), vilket kan tolkas som att de har nått sekvens L där problemet löses och gruppen når sitt mål.

Induktiv analys

Därefter gjorde vi en induktiv och kvalitativ analys där vi undersökte hur eleverna använde tavlan under problemlösningsprocessen samt vad i det matematiska samtalet som ledde till att elevers förkortade resonemang kunde utvecklas till att bli kreativt. Därför tittade vi närmare på de sekvenser där vi kunde se att ett förkortat resonemang förtydligades och utvecklades tills det kunde betecknas som kreativt.

Ett kreativt resonemang definierade vi enligt Granberg & Olsson (2015), som utgår från Lithners ramverk (2008). Detta innebär att resonemanget ska innehålla förslag på lösningsstrategier samt matematiskt förankrade argument för varför de fungerar.

Efter flera noggranna genomläsningar av materialet identifierade vi utsagor som enligt Krutetskii (1976) kan betraktas som förkortade resonemang. De kännetecknades av att de var korrekta påståenden eller beräkningar som saknade matematiskt förankrade motiveringar, vilket kan ses som motsatsen till ett kreativt resonemang. Dessutom noterade vi hur eleverna använde whiteboardtavlan just i dessa sekvenser.

I exempel 2 har vi valt att visa delar av en sekvens från problem 1 där ett förkortat påstående utvecklas tills det kan antas vara ett kreativt resonemang. Eftersom det matematiska samtalet i exemplet skapar, implementerar och prövar elevernas lösningsstrategier, betecknas sekvensen som S enligt analysmallen.

Exempel 2: Passage från problem 1 där ett förkortat resonemang utvecklas till att bli kreativt.

Hän-delse	Utsaga	Agerande	Sekvens enligt analysmall
18	**Sara:** Ta bara tjugosju plus sexton plus 24. Nej, inte 24. Tjugosju plus sexton.	**Sara:** Skriver 27+16 +24 på tavlan och suddar 24	S

Sara ger förslag på en annan lösningsstrategi (18) än den som gruppen prövar i exempel 1. I utsagan anges bara en beräkning som inte motiveras och därför inte är matematiskt förankrad. Påståendet kan därför inte definieras som ett kreativt resonemang enligt Lithner (2008), och på grund av detta gör vi tolkningen att det kan ses som ett förkortat resonemang enligt Krutetskii (1976). Eftersom gruppen i sekvensen skapar, implementerar och prövar en ny lösningsstrategi indikerar det att de arbetar i sekvens S.

19	**Tom:** Motivera!		S
20	**Sara:** Mm. Tjugosju. Så alla har ju en sida mot tjugofyra.	**Sara:** Pekar på övre triangeln i uppgiftspapprets figur och markerar med fingret dess två övre sidor som ingår i den yttre triangeln utan att kommentera. Pekar därefter på alla hörntrianglarna i tur och ordning och markerar med fingret deras sidor vilka ingår i den inre triangelns omkrets. Markerar till sist den yttre triangelns omkrets med fingret	S

När Tom uttrycker ett klargöringsbehov genom att be om en motivering (19) till den förkortade utsagan (18), börjar Sara utveckla sin tidigare, förkortade utsaga (20). Det vi då ser är att eleven i första hand använder whiteboardtavlan (20) genom att peka på de yttre trianglarnas sidor som vetter mot den inre triangeln för att förklara och motivera påståendet.

21	**Love:** Så om vi då tänker att tjugosju… Att hela triangeln är den sidan plus den sidan Det är dom här två sidorna. Det blir tjugosju. Och sen har vi alla…och så har vi… den sidan är sexton... …och den sidan är sexton. Sen har vi bottensidan till tjugosjuan här Och så har vi högersidan i sexton-kvadrat... eh, triangeln där	**Love:** Ritar de två benen i en ny triangel och utgår då från topptriangelns sidor. Pekar på de aktuella sidorna i den gamla figuren Fortsätter på den nya triangelfiguren med att bygga på det vänstra benet och basen utifrån sidorna i triangeln med omkretsen 16. Drar ut basen till bortre hörnet. Ritar ut den återstående delen av det högra benet	S
22	**Sara:** Mm. För alla har ju två *(sidor, förf anm)* som pekar mot den här, alltså mot omkretsen av den stora triangeln Och sen en som pekar mot den här triangeln	**Sara:** Pekar på den yttre triangeln i figuren på uppgiftspappret Pekar på mittersta triangeln i figuren på uppgiftspappret	S

Love förtydligar (21) Sara:s verbalt knapphändiga förklaring (20) av sitt förkortade resonemang (18) genom att del för del rita upp den yttre triangeln på whiteboardtavlan. Love visar då först på den redan uppritade figuren vilken del som används till den nya figuren (21). Efter det verbaliserar Sara motiveringen till den tidigare förkortade utsagan (22). Det enligt Krutetskii (1976) förkortade resonemanget kan då anses ha utvecklats till ett enligt Lithner (2008) kreativt resonemang. Själva resonemanget sker i hela exemplet under turn-taking där elevernas utsagor bygger på varandra, och som tidigare nämnts i sekvens S. I exemplet ovan är det den elev som först förde ett förkortat resonemang (18) som sedan utvecklar det till ett kreativt sådant (22).

Resultat

Problemlösningsprocessens sekvenser

Exempel 1 visar hur problemlösningsprocessen består av olika sekvenser och att dessa inte alltid följer på varandra i en bestämd ordning. Processen startar alltid med sekvens I och slutar alltid med sekvens L. Mellan dessa vandrar skeendet ut och in mellan sekvenserna S och F utan någon bestämd följd.

Igångsättare

Efter noggrann genomläsning av materialet har vi identifierat en typ av utsagor som verkar fungera som igångsättare för ett matematiskt samtal vilket utvecklar ett förkortat resonemang till att bli kreativt. Dessa utsagor kan tolkas som ett uttryck för ett klargöringsbehov vilket tar sig uttryck i form av frågor (“Hur?”), ifrågasättanden (“Varför inte?”), eller uppmaningar att förklara (“Kan du förklara?”), motivera (“Motivera!”) eller utvärdera (“Men testa!”).

I analysdelens exempel 2 ser vi hur Tom:s klargöringsbehov i form av en uppmaning (19) till Sara att motivera sitt förkortade resonemang (18), sätter igång ett matematiskt samtal. Detta samtal sker i form av turn-taking där elevernas utsagor som bygger på varandra (20–22) utvecklar den förkortade beräkningen (18), så att den förankras matematiskt och därmed kan betraktas som ett kreativt resonemang (22). Detta sker som vi tidigare motiverat i sekvens S.

Exempel 3 nedan visar en passage från problem 2 där uttalade klargöringsbehov får samma effekt som i exempel 2. Även i denna sekvens skapar och implementerar en lösningsstrategi vilket gör att vi bedömer att problemlösningsprocessen sker i sekvens S.

Exempel 3: Passage i sekvens S från problem 2, där klargöringsbehov initierar en utveckling av ett förkortat resonemang till att bli kreativt.

Hän-delse	Utsaga	Agerande	Sekvens enligt analysmall
23		David Börjar rita figuren	I
24	David: Om man typ drar ut den här… Dit. Och tar bort den här lilla… …så skulle den här vara exakt lika stor som den här	Pekar på punkten där de två mindre halvcirklarna möts Pekar först på den mellanstora halvcirkeln och sedan på den stora	S
25	Adam: Hur?		S
26	Sara: Kan du förklara?		S

Efter att ha satt upp uppgiftspapperet på whiteboardtavlan (23) påbörjar David en lösningsstrategi (24), och övergår därmed från sekvens I till sekvens S. Lösningsstrategin beskrivs otydlig och saknar matematisk motivering (24), vilket gör att utsagan kan tolkas som ett förkortat resonemang. Utsagan utlöser frågor från de övriga i gruppen (25–26) som tyder på att de vill ha ett klargörande.

27	Adam: Men visst, om du tar bort den här. Om den här kanten… Då skulle den här bågen vara identisk med den här För att grejen är, för att i en cirkel så är kanten alltid samma sträcka från varandra Den här sträckan… …är samma sträcka som till hit	Adam: Pekar på den minsta halvcirkeln Pekar på den punkt där de två mindre halvcirklarna möts… Visar först på den mellanstora halvcirkelbågen och sedan på den största. Ritar en radie i den stora halvcirkeln Visar på radien och markerar sedan stora halvcirkelns diameter	S
28	David: Ja		S
29	Adam: Den är alltid…Alltså. Den är alltid i förhållande till…		S
30	Sara: Eller, alltså… Sträckan här… …är lika lång som den här	Sara: Pekar på den stora halvcirkelns halva diameter Pekar på den inritade radien	S

Efter att frågorna har ställts (25–26) börjar en annan elev än den som uttalade det förkortade utsagan (24) att utveckla resonemanget (27), men det saknar fortfarande en tydlig matematisk motivering. Därefter sker ett ytterligare förtydligande av en tredje elev (30) då resonemanget får en matematiskt förankrad motivering och därför kan tolkas som kreativt. Detta sker alltså under turn-taking där elevernas utsagor bygger på varandra fram till dess att de har utvecklat resonemanget så att det uppfyller kriterierna för ett kreativt sådant. Denna process (27–30) sker i sekvens S och ser ut att utlösas av de klargöringsfrågor (25-26) som ställs efter den förkortade utsagan (24).

I exemplet ovan är det inte David, vilken först förde det förkortade resonemanget (24), som sedan är mest aktiv i att utveckla det till ett kreativt sådant (30). Istället involverar det matematiska samtalet i första hand de övriga två i gruppen (27–30), som under turn taking utvecklar det förkortade påståendet (24).

När utsagor som uttrycker ett klargöringsbehov förekommer i andra sekvenser än sekvens S, ser de inte ut att fungera som igångsättare förrän det matematiska samtalet övergår till sekvens S. I exempel 4 nedan från problem 2 förekommer flera utsagor i sekvens F som uttrycker ett klargöringsbehov. Utsagorna följer på ett förkortat påstående, men inte förrän processen övergår till sekvens S börjar gruppen utveckla detta till ett kreativs resonemang.

Exempel 4: Passage i sekvens F från problem 2, där klargöringsbehov inte initierar en utveckling av ett förkortat resonemang till att bli kreativt.

Hän-delse	**Utsaga**	**Agerande**	**Sekvens enligt analysmall**
31	David: Frågan är om det kommer bli större area… eller längd, eftersom det är två stycken?		S
32	Adam: Ja, det är ju den jag har… Nej, det är det inte		S

33	David: Varför inte?		S
34	Adam: Jag vet det bara	Adam: Ler	F
35	David: Jag vet det bara… Men testa och skriv!	David: Skrattar	F
36	Sara: Man kan använda det vi använde förut		F
37	Adam: Jag har testat att det blir samma		F
38	David: Vi borde ju testa		F
39	Sara: Men testa på tavlan		F
40	Adam: Ok, men jag testar lite		S
41	Adam: Om vi säger att den här sidan är x	Adam ritar figuren på whiteboardtavlan, och markerar sedan den mellanstora halvcirkelns diameter med x	S

Adam gör ett påstående utan någon matematiskt förankrad motivering (32) vilket därför kan ses som ett förkortat resonemang. David ber därefter först om en motivering till påståendet (33), och sedan att påståendet ska prövas (35, 38) på whiteboardtavlan. Dessa utsagor kan ses som att de uttrycker ett klargöringsbehov eftersom eleven dels vill ha en matematisk motivering till påståendet (32), och dels pröva vill relevansen i uttalandet (32). Även Sara ger uttryck för samma klargöringsbehov (39). Utsagorna 33, 35, 38 och 39 kan därför tolkas som igångsättare som uttrycker ett klargöringsbehov. Men dessa igångsättare initierar inte ett utvecklande av den förkortade utsagan (32) så länge eleverna förhandlar, och därför befinner sig i sekvens F (34–39). Inte förrän de har enats om hur de ska gå vidare, går problemlösningsprocessen över i sekvens S (40–41). Efter 41 fortsätter eleverna att under turn-taking utveckla den förkortade utsagan (32) till ett generellt samband som utgör en matematiskt förankrad motivering till påståendet. Detta sker under ett långt matematiskt samtal som inte visas i exemplet.

Efter upprepade genomläsningar av vårt material har vi sett att utsagor i sekvens S som uttrycker ett klargöringsbehov, sätter igång ett matematiskt samtal där förkortade resonemang utvecklas till att bli kreativa sådana. Det matematiska samtalets diskurs ändras således och därför har vi goda skäl att benämna dessa utsagor för igångsättare.

Vi har även sett att denna process alltid sker under turn-taking, och att det inte nödvändigtvis är den elev som först fört ett förkortat resonemang som är mest aktiv i att utveckla detta. Men att det kollaborativa arbetssättet gör att alla i gruppen når en gemensam förståelse och omfattar det utvecklade resonemanget. Att denna process endast fungerar i sekvens S kan tänkas bero på att det endast är i denna sekvens som det sker en turn-taking, och att det därför bara är där som resonemanget kan utvecklas.

Whiteboardtavlans roll i det matematiska samtalet

Elevernas agerande visar att whiteboardtavlan som gemensam arbetsyta har en central roll i det matematiska samtalet. Under problemlösningsprocessens alla fyra sekvenser skriver eleverna beräkningar och samband samt ritar figurer och pekar för att visualisera och förtydliga vad de menar. Detta framgår i samtliga exempel under agerandekolumnen. Whiteboardtavlans betydelse för förtydligandet av det förkortade resonemanget exemplifieras i exempel 2 genom Sara:s agerande (20) i sekvens S. Eleven motiverar inte sin föreslagna lösningsstrategi med ord, utan använder tavlan i första hand för att visa vad som ligger bakom hens tidigare förkortade uttalande.

Dessutom ger tavlan alla i gruppen en möjlighet att kontinuerligt övervaka processen. Övervakningen underlättar i sin tur för var och en att delta aktivt i det matematiska samtalet och på så sätt bidra med sina resurser i problemlösningsprocessen. Detta visar whiteboardtavlans betydelse då ett förkortat resonemang utvecklas till ett kreativt sådant i en kollaborativ problemlösningsprocess.

Diskussion

Sammanfattningsvis kan vi utifrån vårt material anta att whiteboardtavlan och det kollaborativa arbetssättet i samverkan med problem som definierats enligt Lithner (2008), leder till färre förkortningar för elever som traditionellt ofta förkortar sitt matematiska resonemang enligt Krutetskii (1976). I vår studie sker detta i en prestationshomogen grupp, vilket tidigare har undersökts i samband med kooperativt arbetssätt (Coleman & Cross, 2014; George, 1976; Hunt, 1996). Dessa studier har då visat att matematiskt begåvade elever presterar bättre under dessa omständigheter, vilket är i samklang med våra resultat. I sammanhanget är det väl värt att notera att det finns indikationer på att eleverna under dessa omständigheter endast presterar bättre om problemen de arbetar med är tillräckligt utmanande (Diezmann & Watters, 2001; Tretter, 2005). Detta understryker vikten av problemens utformning och våra resultat tyder på att Lithners ramverk (2008) med fördel kan användas för att uppnå detta. Granberg och Olsson (2015) bekräftar att problem utformade efter Lithners ramverk har en positiv effekt på problemlösningsprocessen, vilket vi även ser tecken på i vårt material.

Efter upprepade genomläsningar av elevernas arbete har vi sett att problemlösningsprocessen genomgår olika sekvenser, vilket även framgår i tidigare studier (Pólya, 1966). Vi har även sett att processen är cyklisk och att den fluktuerar mellan sekvenserna utan en viss ordning, vilket överensstämmer med Carlson och Blom (2005). Vår induktiva analys visar att när det matematiska samtalet pågår i sekvens S kan det uppstå en utveckling av ett förkortat resonemang till ett kreativt sådant. Efter noggrann analys av vårt material har vi goda skäl att tro att det är uttalanden som uttrycker behov av klargöranden som sätter igång denna process, och därför har vi valt att kalla dem för igångsättare. Dessa igångsättare verkar enbart få den effekten när själva problemlösningsprocessen befinner sig i sekvens S. Vi har även sett att det matematiska samtal som uppstår efter en igångsättare, och som då utvecklar ett förkortat resonemang till att bli kreativt, alltid sker i form av turn-taking. Detta indikerar då att det kollaborativa arbetssättet, där kommunikation uppstår i form av ett matematiskt samtal, skulle vara en förutsättning för att dessa igångsättare kan uppstå. Men det matematiska samtalet är inte bara en förutsättning för att igångsättare ska uppstå och bidra till ett utvecklat resonemang, utan även för att turn-taking ska komma till stånd.

Som redan nämnts är kommunikation i form av ett matematiskt samtal en förutsättning för problemlösningsprocessen, när den sker i ett kollaborativt sammanhang. Vi har i vår studie sett exempel på att för elever som förkortar sitt resonemang kan det dock vara lättare att visualisera sina tankar än att uttrycka dem med ord. Därför underlättar tillgången till whiteboardtavlan som gemensam arbetsyta på så sätt kommunikationen. Elevernas flitiga användning av tavlan under hela problemlösningsprocessen talar för detta och understryker dess vikt som redskap för att utveckla det förkortade resonemanget till att bli kreativt. Vikten av tillgången till en gemensam arbetsyta under problemlösningsprocessen lyfts fram av Granberg och Olsson (2015), men i deras studie utgjordes arbetsytan av en dator. Även

Liljedahl (2016) poängterar den gemensamma arbetsytans vikt och visar då på att en horisontell whiteboardtavla påverkar aktivitet och resultat i problemlösningsprocessen i positiv riktning mer än andra icke-digitala alternativ.

Tidigare forskning (Granberg & Olsson, 2015; Roschelle & Teasley, 1994) har redan bekräftat att eleverna når längre när det gäller kunskap och förståelse om problemlösningen sker under kollaborativt arbete vid en gemensam arbetsyta och under ett matematiskt samtal. De tidigare studier som är gjorda på elever med hög matematisk begåvning har haft inriktning på kooperativt eller individuellt arbete, och visar att dessa elever når längre i sina resultat under ett kooperativt arbetssätt i prestationshomogena grupper än vid individuellt sådant (Szabo, 2017). Som komplement till detta tyder vår studie på att elever med hög matematisk begåvning samarbetar effektivt under kollaborativa arbetsformer och då även uppnår bättre resultat när det gäller resonemangskvalitet än vid individuellt arbete.

Vad som kan bidra till färre förkortningar för elever med hög matematisk begåvning har så vitt vi vet inte heller undersökts i tidigare forskning, men utifrån vårt material har vi god anledning att tro att problem definierade av Lithners ramverk (2008) samt ett kollaborativt arbetssätt med en gemensam arbetsyta, leder till att förkortade resonemang enligt Krutetskii (1976) utvecklas och blir kreativa.

Ytterligare ett nytt bidrag är att vår studie talar för att när elever med hög matematisk begåvning får arbeta under de ovan nämnda förhållandena samt i prestationshomogena grupper, kan deras förkortade resonemang enligt Krutetskii (1976) utvecklas till att bli kreativa enligt Lithners definition (2017). De faktorer som bidrar till detta verkar vara utsagor som uttrycker ett klargöringsbehov och som sätter igång ett matematiskt samtal i form av turn-taking. Men denna process sker endast i sekvens S eftersom det bara är där som en turn-taking uppstår.

I svensk skola utgör ju förmågorna att resonera och kommunicera, underlag för bedömning i ämnet matematik. För att en rättvis bedömning ska kunna ske för de elever som förkortar sitt resonemang, är det inte orimligt att anta att de arbetsformer som beskrivs i studien skulle kunna bidrar till att utveckla dessa förmågor. I ett individuellt arbetssätt har den aktuella elevgruppen varken tillgång till en gemensam arbetsyta eller det matematiska samtalet med igångsättare, och går därför miste om dessa redskap för att kunna utveckla sitt förkortade resonemang. Detta kan leda till att deras egentliga förståelse och kunskap inte synliggörs och därför är det förmodligen viktigt för just dessa elever att få arbeta under följande förhållanden:

- i prestationshomogena grupper
- under kollaborativa arbetsformer
- vid en gemensam arbetsyta, och då med fördel en horisontell whiteboardtavla
- med problem som utmanar eleverna på en för dem anpassad nivå med ett innehåll som är helt eller delvis okänt, samt att problemen kan lösas utan traditionella metoder och även ge upphov till ett kreativt resonemang

Vi vill till sist framhäva att den här studien har skett i svensk skola med elever från årskurs nio som sedan tidigare känner varandra och är väl bekanta med att arbeta kollaborativt vid en gemensam arbetsyta. Med ett annat elevunderlag i ett annat sammanhang och med en annan analysmodell, skulle vi säkert kunnat få andra resultat som lett till andra slutsatser.

Referenser

Bergqvist, T. & Lithner, J. (2005). *Simulating Creative Reasoning in Mathematics Teaching.* Department of Mathematics and Mathematical statistics, Umeå Universitet. Research reports in Mathematics Education No. 2.

Bloom, B. S. & Sosniak, L. A. (1985). *Developing talent in young people.* New York: Ballantine Books.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (2., [rev.] uppl.) Malmö: Liber.

Carlson, M., & Bloom, I. (2005). *The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework*. Educational Studies in Mathematics, 58(1), 45-75. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x

Clark, H. & Schaefer, E. (1989). *Contributing to discourse.* Cognitive Science, 13, 259-294.

Clements, M. A. (1984). *Terence Tao*. Educational Studies in Mathematics, 15(3), 213–238. *[Elektronisk resurs]*. https://doi-org.ezp.sub.su.se/10.1007/BF00312075

Coleman, L. J. & Cross, T. L. (2014). *Is being gifted a social handicap?* Journal for the Education of the Gifted, 5-17.

Diezmann, C. M. & Watters, J. J. (2001). *The collaboration of mathematically gifted students on challenging tasks*. Journal for the Education of the Gifted, 25 (1), 7–31.

George, W.C. (1976). *Accelerating mathematics instruction for the mathematically gifted*. Gifted Child Quarterly 20 (3), 246-261.

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). *ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software*. Journal of Mathematical Behavior, 37, 48–62.

Helenius, O. (2006). *Kompetenser och matematik*. Nämnaren 3/2006, *[Elektronisk resurs]* ncm.gu.se/pdf/namnaren/1115_06_3.pdf

Hunt, B. (1996). *The effect on mathematics achievement and attitude of homogeneous and heterogeneous grouping of gifted sixth-grade students*. Journal of Advanced Academics, 8 (2), 65–73.

Juter, K. & Sriraman, B. (2011). *Does high achieving in mathematics = gift-ed and/or creative in mathematics?* I B. Sriraman & K. H. Lee (Red.), The elements of creativity and giftedness in mathematics (s. 45-66). Rotterdam: Sense Publishers.

Koshy, V., Ernest, P., & Casey, R. (2009). *Mathematically Gifted and Talented Learners: Theory and Practice*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume 40, Issue 2, 2009, pp 213 – 228.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, Ill.: Univ. of Chicago P.

Liljedahl, P. (2014). *The affordances of using visually random groups in a mathematics classroom*. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (eds.) Transforming Mathematics Instruction: Multiple Approaches and Practices. New York, NY: Springer.

Liljedahl P. (2016). *Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving*. In: Felmer P., Pehkonen E., Kilpatrick J. (eds) Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education. Springer, Cham.

Lithner, J. (2008). *A research for creative and imitative reasoning*. Springer Science and Business Media B.V.

Lithner, J. (2017). *Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning*. ZDM - the International Journal on Mathematics Education, 49:6, 937-949.

Mönks, F. J. & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn.* Stockholm: Natur & Kultur.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag.

Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor [Elektronisk resurs]*. Diss. Växjö: Linnéuniversitetet.

Pólya, G. (1966). *Let us teach guessing: A demonstration with George Pólya*. In K. Simon (Producer), MAA video classics: Mathematical Association of America.

Pythagoras Quest. (2009). *Kvalprov 2009, uppgift 13*. http://www.pythagorasquest.se/. Initiativ till tävlingen: Handelskammaren och Malmö Borgarskola.

Rosca, A. & Zörgő, B. (1973). *A képességek* (Förmågorna). Budapest: Tudományos Könyvkiadó.

Roschelle, J., & Teasley, S. (1994). *The construction of shared knowledge in collaborative problem solving [NATO ASI Series F]*. Computer and Systems Sciences, (128), 69–97.

Schegloff, E. A., Jefferson, G., & Sachs, H. (1977). *The preference for self-correction in the organization of repair in conversation*. Language, 53, 361-382.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Skolverket (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. REVIDERAD 2019. Norstedts Juridik AB.

Skolöverstyrelsen. (1980). *Läroplan för grundskolan Allmän del: mål och riktlinjer, kursplaner, timplaner*. Stockholm: Liber Läromedel.

Sheffield, L. (2003). *Extending the challenge in mathematics.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*. Licentiatavhandling Stockholm: Stockholms universitet.

Szabo, A. (2017). *Matematikundervisning för begåvade elever – en forskningsöversikt.* Nordic Studies in Mathematics Education, 22 (1), 21-44

Tretter, T. R. (2005). *Gifted students speak – mathematical problem-solving insights*. I S. K. Johnsen & J. Kendrick (red), Math education for gifted students, 119–143. Waco: Prufrock Press.

Utbildningsdepartementet. (1994). *Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna: Lpo 94 : Lpf 94*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vygotskij, L. S. (1987). *The collected works of L.S. Vygotsky.* Vol. 1, Problems of general psychology including the volume Thinking and speech. New York: Plenum P.

Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn.* Stockholm: Nordstedts.

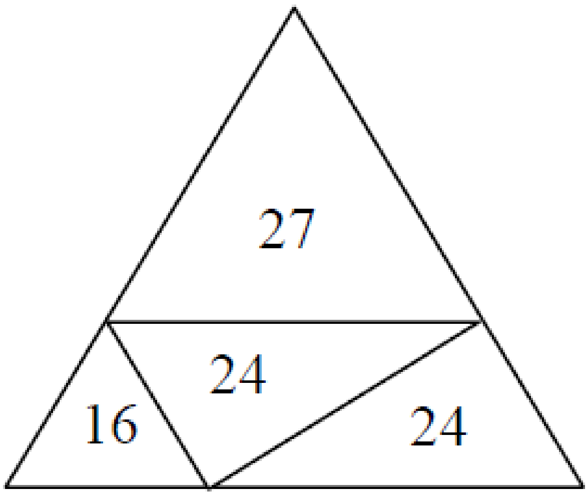
Bilaga 1: Problem 1 och 2 samt lösning av dessa

Problem 1

Talen i figuren visar omkretsen i var och en av de 4 trianglarna.

Vad är omkretsen av den stora triangeln?

Motivera ditt svar.



Problem 1 - Lösningar

Problem 1 hämtat från: Pythagoras Quest. (2009).

Nytt innehåll för eleverna

Hur den yttre triangelns omkrets ska kunna beräknas ur deltrianglarnas

Lösning 1

Summan av den yttre samt den inre triangelns omkrets är 27 + 16 + 24. Varje sträcka kan bara användas EN gång i beräkningen av den yttre triangelns omkrets. Därför måste de sträckor som bildar den inre triangeln tas bort för att få den yttre triangelns omkrets.

27 + 16 + 24 – 24 = 43

Lösning 2

Om den översta triangeln är liksidig blir alla sidor 9

Om den vänstra triangeln är liksidig blir varje sida 16/3

Därför borde varje sida vara 9 + 16/3

Omkretsen blir då 3 x 9 + 3 x 16/3, det vill säga 27 + 16 = 43

Resonemangstyp

Lösning 1: Globalt Kreativt Resonemang (GKR), vilket innebär att den största delen av lösningen är okänd för eleverna. Det finns inga liknande problem eller exempel i de läromedel som eleverna har arbetat med.

Lösning 2: Lokalt Kreativt Resonemang (LKR). Det finns inga liknande problem eller exempel i de läromedel som eleverna har arbetat med, men däremot flera som behandlar liksidiga trianglar. Om eleven väljer att utgå från antagandet att två trianglar är liksidiga, finns det flera exempel som behandlar och utgår från liksidighet. Det nya är att det är flera trianglar, att det är den större som ska beräknas samt att det även finns en inre triangel.

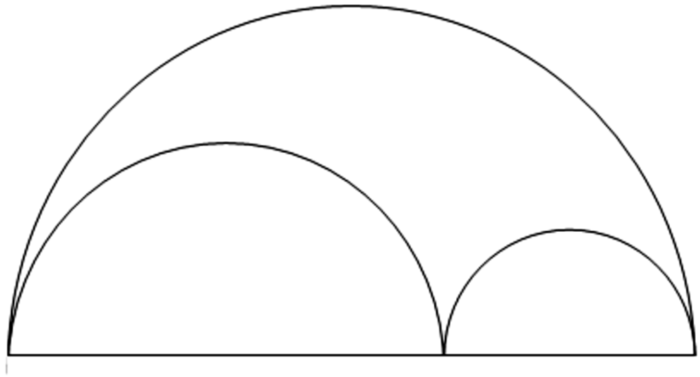
Problem 2

I en halvcirkel ritar vi ytterligare två halvcirklar, enligt figuren nedan.

Är den stora halvcirkelns längd större, mindre eller lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder?

Besvara frågan utan att mäta i figuren eftersom den inte nödvändigtvis är skalenlig.
Ej miniräknare.

Motivera ditt svar.
Finns det mer än en lösning?



Problem 2 - Lösningar

Problem 2 och lösning hämtat från: Szabo, A. (2013).

Nytt innehåll för eleverna

Två okända sträckor ska bestämmas

Lösning 1

Notera den stora cirkelns diameter med d
Den stora cirkelns omkrets = $\pi \cdot d$
Den stora halvcirkelns längd = $\pi \cdot d/2$
Notera den mindre inskrivna cirkelns diameter med x
Den större inskrivna cirkelns diameter = $d – x$
Summan av de två inskrivna cirklarnas omkrets = $\pi \cdot x + \pi(d – x) = \pi x + \pi d – \pi x = \pi d$
Summan av de två inskrivna halvcirklarnas längder = $\pi \cdot d/2$

Svar: Den stora halvcirkelns längd är lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder.

Lösning 2

Ange den stora cirkelns diameter med ett tal, t.ex. 3
Den stora cirkelns omkrets = $\pi \cdot 3$
Den stora halvcirkelns längd = $\pi \cdot 3/2 = 1{,}5\pi$
Notera den mindre inskrivna cirkelns diameter med 1
Den större inskrivna cirkelns diameter = $3 – 1 = 2$
Summan av de två inskriva cirklarnas omkrets = $\pi \cdot 1 + \pi \cdot 2 = 3\pi$
Summan av de två inskriva halvcirklarnas längder = $\pi \cdot 3/2 = 1{,}5\pi$
Sedan testas det med ett nytt tal för den stora cirkelns diameter, t.ex. 5
Ovanstående procedur upprepas för att testa om de två längderna är lika.
Efter det kan man generalisera resultaten, genom att t.ex. konstatera att ”Detta verkar stämma i varje cirkel. Låt oss notera den omskrivna cirkelns diameter med d, den minsta cirkelns diameter med x och den andra cirkelns diameter med d – x”.
Sedan genomför man den ovan beskrivna allmänna lösningen.

Svar: Den stora halvcirkelns längd är lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder.

Resonemangstyp

Lösning 1: Globalt Kreativt Resonemang (GKR). Det finns inga liknande problem eller exempel i de läromedel som eleverna har arbetat med.

Lösning 2: Lokalt Kreativt Resonemang (LKR). Det finns inga liknande problem eller exempel i de läromedel som eleverna har arbetat med, men de har under årens lopp ibland använt metoden att pröva sig för att komma framtill en lösning.